Optimálne riadenie hybridných systémov

Miroslav Fikar

Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Radlinského 9, 812 37 Bratislava, Slovenská republika
miroslav.fikar@stuba.sk, http://www.kirp.chtf.stuba.sk

Seminár hybridné systémy

Ciele prezentácie

- Optimálne riadenie v otvorenej slučke = dynamická optimalizácia
  - Chceme určiť najlepšiu možnú trajektóriu riadenia
  - Zaujímajú nás vlastnosti optimálneho riadenia
  - Určujeme trajektóriu pre sledovanie v nižšej úrovni riadenia
- Hybridná dynamika
  - Kombinácia spojitej dynamiky a logických podmienok
  - Môžeme modelovať aj veľmi zložité systémy.

Prehľad

1. Dynamická optimalizácia hybridných systémov
   - Definícia hybridného systému
   - Definícia problému
   - Možnosti riešenia optimalizačného problému
2. Sekvenčná metóda – parametrizácia vektora riadenia
   - Princíp metódy
   - Nespojitosť stavových a adjugovaných veličín
   - Algoritmus riešenia
   - Grafická interpretácia algoritmu riešenia
3. Ilustratívne príklady
   - Riadenie zásobníkov kvapaliny
   - Riadenie dvojstupňového chemického reaktora

Prehľad

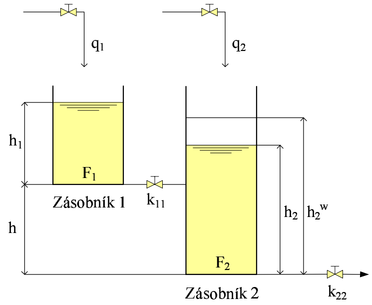
Definícia hybridného systému

Systém je opísaný nasledujúcimi **diferenciálnymi rovnicami**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_i(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}), \quad t_{i-1} \le t \le t_i, \quad i = \overline{1, P} \tag{1}$$

Časy prepnutia v okamihu t_i sú dané **podmienkami prepnutia**

$$\boldsymbol{g}_i(t_i, \boldsymbol{x}(t_i^-), \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}, \quad i = \overline{1, P-1} \tag{2}$$

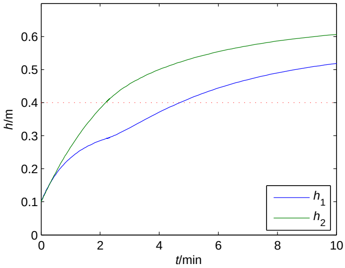


Definícia prerušenia

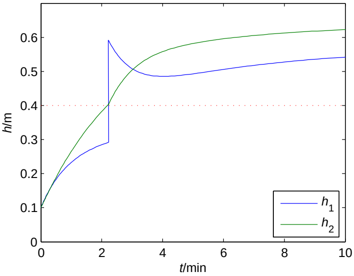
V čase prepnutia môže byť vektor $\boldsymbol{x}(t)$ **nespojitý** s prerušením v tvare

$$\boldsymbol{x}(t_i^+) = \boldsymbol{x}(t_i^-) + \boldsymbol{\Delta}_i(t_i, \boldsymbol{x}(t_i^-), \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}) \tag{3}$$

Ak $\boldsymbol{\Delta}_i = \boldsymbol{0}$, potom vektor $\boldsymbol{x}(t)$ je **spojitý** v čase prepnutia.



Obr.: Spojitá zmena ($\Delta_{1,2} = 0$)



Obr.: Skoková zmena ($\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 = 0$)

Prehľad

1. Dynamická optimalizácia hybridných systémov
   - Definícia hybridného systému
   - Definícia problému
   - Možnosti riešenia optimalizačného problému
2. Sekvenčná metóda – parametrizácia vektora riadenia
   - Princíp metódy
   - Nespojitosť stavových a adjugovaných veličín
   - Algoritmus riešenia
   - Grafická interpretácia algoritmu riešenia
3. Ilustratívne príklady
   - Riadenie zásobníkov kvapaliny
   - Riadenie dvojstupňového chemického reaktora

Definícia problému

Cieľom je nájsť také **riadenie** $\boldsymbol{u}_i$, ktoré **minimalizuje** funkcionál J_0

$$\min_{t_P, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}} J_0 = G(t_P, \boldsymbol{x}(t_P), \boldsymbol{u}(t_P), \boldsymbol{p}) + \int_{t_0}^{t_P} F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}) \mathrm{d}t \tag{4}$$

vzhľadom na **obmedzenia** typu rovnosti a nerovnosti

$$J_j = 0, \quad j = \overline{1, k_e} \tag{5}$$

$$J_j \geq 0, \quad j = k_e + \overline{1, k_i} \tag{6}$$

s **obmedzeniami** na optimalizované premenné

$$\Delta \boldsymbol{t}_i \in [\Delta \boldsymbol{t}_i^{\min}, \Delta \boldsymbol{t}_i^{\max}] \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}_i \in [\boldsymbol{u}_i^{\min}, \boldsymbol{u}_i^{\max}] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{p}_i \in [\boldsymbol{p}_i^{\min}, \boldsymbol{p}_i^{\max}] \tag{9}$$

Prehľad

Možnosti riešenia optimalizačného problému

- **Analytické metódy**
  - Dynamické programovanie (DP)
  - Pontrjaginov princíp minima/maxima (PMP)
  - Variačný počet (VP)
- **Numerické metódy**
  - Stavy aj riadenie sú spojité:
    - Iterácia hraničnej podmienky (BCI)
    - Iterácia vektora riadenia (CVI)
  - Stavy sú spojité, riadenie je aproximované:
    - Sekvenčná metóda – parametrizácia vektora riadenia (CVP)
  - Stavy, aj riadenie sú aproximované:
    - Simultánna metóda (totálna parametrizácia)

Možnosti riešenia optimalizačného problému

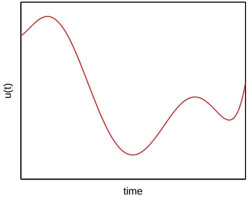
- **Analytické metódy**
  - Dynamické programovanie (DP)
  - Pontrjaginov princíp minima/maxima (PMP)
  - Variačný počet (VP)

- **Numerické metódy**
  - Stavy aj riadenie sú spojité:
    - Iterácia hraničnej podmienky (BCI)
    - Iterácia vektora riadenia (CVI)
  - Stavy sú spojité, riadenie je aproximované:
    - Sekvenčná metóda – parametrizácia vektora riadenia (CVP)
  - Stavy, aj riadenie sú aproximované:
    - Simultánna metóda (totálna parametrizácia)

Parametrizácia vektora riadenia CVP

D.O. problém

$$\min_{u(t)} G(\cdot) + \int F(\cdot)\mathrm{d}t$$

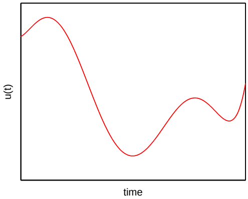


nekonečný počet opt. veličín ($u(t)$)

Parametrizácia vektora riadenia CVP

D.O. problém

$$\min_{u(t)} G(\cdot) + \int F(\cdot)\mathrm{d}t$$

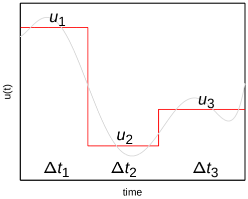


nekonečný počet opt. veličín ($u(t)$)

$\Rightarrow$

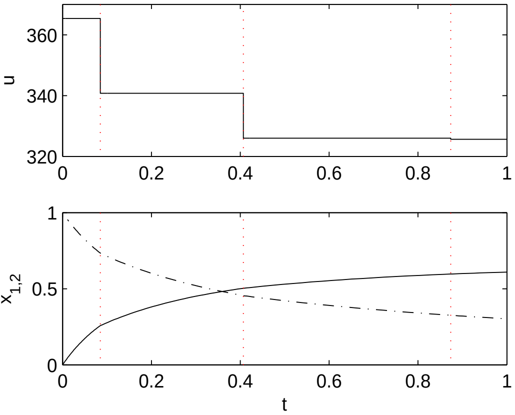
NLP problém

$$\min_{u_i,\Delta t_i} G(\cdot) + \int F(\cdot)\mathrm{d}t$$



konečný počet opt. veličín (u_i, Δt_i)

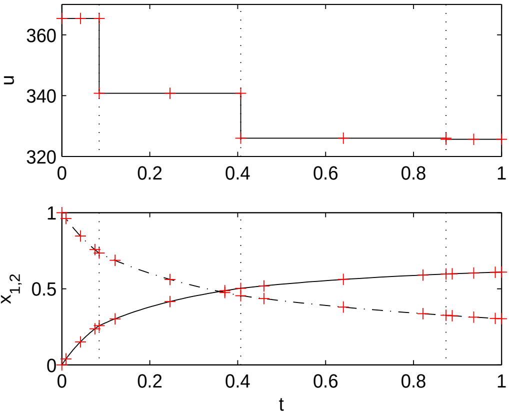
Totálna parametrizácia na konečných prvkoch



1. Diskretizácia času
   - voľba Δt_i
   - výpočet t_{ij}
2. Totálna parametrizácia
   - $u(t) = \sum_{j=1}^{ncolu} u_{ij}\psi_j(t)$
   - $x(t) = \sum_{j=0}^{ncolx} x_{ij}\phi_j(t)$
3. Optimalizované premenné

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} = & [\Delta t_1, \ldots, \Delta t_{ni}, \\ & \boldsymbol{u}_{11}, \ldots, \boldsymbol{u}_{ij}, \\ & \boldsymbol{x}_{10}, \ldots, \boldsymbol{x}_{ij}]^T \end{aligned}$$

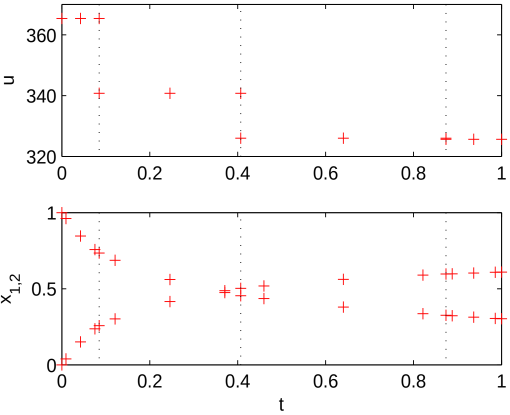
Totálna parametrizácia na konečných prvkoch



1. Diskretizácia času
   - voľba Δt_i
   - výpočet t_{ij}
2. Totálna parametrizácia
   - $u(t) = \sum_{j=1}^{ncolu} u_{ij}\psi_j(t)$
   - $x(t) = \sum_{j=0}^{ncolx} x_{ij}\phi_j(t)$
3. Optimalizované premenné

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} = & [\Delta t_1, \ldots, \Delta t_{ni}, \\ & \boldsymbol{u}_{11}, \ldots, \boldsymbol{u}_{ij}, \\ & \boldsymbol{x}_{10}, \ldots, \boldsymbol{x}_{ij}]^T \end{aligned}$$

Totálna parametrizácia na konečných prvkoch



1. Diskretizácia času
   - voľba Δt_i
   - výpočet t_{ij}
2. Totálna parametrizácia
   - $u(t) = \sum_{j=1}^{ncolu} u_{ij}\psi_j(t)$
   - $x(t) = \sum_{j=0}^{ncolx} x_{ij}\phi_j(t)$
3. Optimalizované premenné

$$\boldsymbol{z} = [\Delta t_1, \ldots, \Delta t_{ni}, \boldsymbol{u}_{11}, \ldots, \boldsymbol{u}_{ij}, \boldsymbol{x}_{10}, \ldots, \boldsymbol{x}_{ij}]^T$$

Prehľad

Princíp metódy

Charakteristické črty sekvenčnej metódy:

- Princíp:
  - Transformácia problému **dynamickej** optimalizácie na problém **statickej** optimalizácie (**NLP** – nelineárne programovanie).
  - Úlohu NLP je potom možné riešiť vhodnou **gradientovou metódou** a algoritmom typu **SQP**.
- Integrácia:
  - **dopredná** – optimalizovaný proces
  - **spätná** – systém adjugovaných rovníc a podintegrálnych tvarov
- Výpočet: **iteračný**
- Typ metódy: **gradientová**

$$\frac{\partial J}{\partial t_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}} = 0 \tag{10}$$

Metódy výpočtu gradientov

- **konečnou diferenciou** – systém je integrovaný n_q krát a vždy jedna optimalizovaná premenná je trochu posunutá.

$$\nabla_{y_i} J_j = \frac{J_j(y_1, \dots, \Delta y_i, \dots, y_{n_q}) - J_j(\boldsymbol{y})}{\Delta y_i}, \qquad j = \overline{0, k} \tag{11}$$

- **citlivostnými rovnicami** – získame diferenciáciou systému podľa optimalizovaných parametrov

$$\dot{s}_{\boldsymbol{u}_{ij}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}_{ij}^T}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}^T} s_{\boldsymbol{u}_{ij}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{u}^T} \tag{12}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{u}_{ij}} J = \sum_{i=1}^{P} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_i^-)} s_{\boldsymbol{u}_{ij}} + \sum_{i=1}^{P} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} + \int_{t_0}^{t_P} \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}^T} s_{\boldsymbol{u}_{ij}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\right) \mathrm{d}t \tag{13}$$

- **adjugovanými rovnicami**

Variácia J_j vzhľadom na **optimalizované** premenné ($0 \le j \le k$)

$$
\begin{aligned}
\delta J = & \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{b}_i \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P} \left[\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} + \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{c}_i \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_0^+) \frac{\partial x_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \int_{t_0}^{t_P} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[H(t_P^-) + \frac{\partial G}{\partial t_P} \right] \delta t_P
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Výrazy v zátvorkách sú **gradienty** vzhľadom na **optimalizované premenné** pre **NLP** ($t_i, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}$).

Variácia J_j vzhľadom na **optimalizované** premenné $(0 \leq j \leq k)$

$$\delta J = \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{b}_i \right] \delta \boldsymbol{u}_i$$
$$+ \sum_{i=1}^{P} \left[\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} + \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{u}_i$$
$$+ \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{c}_i \right] \delta \boldsymbol{p}$$
$$+ \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_0^+) \frac{\partial x_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \int_{t_0}^{t_P} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{p}$$
$$+ \left[H(t_P^-) + \frac{\partial G}{\partial t_P} \right] \delta t_P \tag{14}$$

Výrazy v zátvorkách sú **gradienty** vzhľadom na **optimalizované premenné** pre **NLP** $(t_i, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p})$.

Variácia J_j vzhľadom na **optimalizované** premenné $(0 \le j \le k)$

$$\begin{aligned}
\delta J = & \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{b}_i \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P} \left[\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} + \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{c}_i \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_0^+) \frac{\partial x_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \int_{t_0}^{t_P} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[H(t_P^-) + \frac{\partial G}{\partial t_P} \right] \delta t_P
\end{aligned} \tag{14}$$

Výrazy v zátvorkách sú **gradienty** vzhľadom na **optimalizované premenné** pre **NLP** $(t_i, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p})$.

Variácia J_j vzhľadom na **optimalizované** premenné ($0 \le j \le k$)

$$
\begin{aligned}
\delta J = & \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{b}_i \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P} \left[\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} + \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{c}_i \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_0^+) \frac{\partial x_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \int_{t_0}^{t_P} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[H(t_P^-) + \frac{\partial G}{\partial t_P} \right] \delta t_P
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Výrazy v zátvorkách sú **gradienty** vzhľadom na **optimalizované premenné** pre **NLP** ($t_i, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}$).

Variácia J_j vzhľadom na **optimalizované** premenné ($0 \leq j \leq k$)

$$
\begin{aligned}
\delta J = & \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{b}_i \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P} \left[\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} + \int_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}_i^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{u}_i \\
& + \sum_{i=1}^{P-1} \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} \right) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} \right) \right] \boldsymbol{c}_i \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_0^+) \frac{\partial x_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \int_{t_0}^{t_P} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}^T} \mathrm{d}t \right] \delta \boldsymbol{p} \\
& + \left[H(t_P^-) + \frac{\partial G}{\partial t_P} \right] \delta t_P
\end{aligned} \tag{14}
$$

Výrazy v zátvorkách sú **gradienty** vzhľadom na **optimalizované premenné** pre **NLP** ($t_i, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}$).

Prehľad

1. Dynamická optimalizácia hybridných systémov
   - Definícia hybridného systému
   - Definícia problému
   - Možnosti riešenia optimalizačného problému
2. Sekvenčná metóda – parametrizácia vektora riadenia
   - Princíp metódy
   - Nespojitosť stavových a adjugovaných veličín
   - Algoritmus riešenia
   - Grafická interpretácia algoritmu riešenia
3. Ilustratívne príklady
   - Riadenie zásobníkov kvapaliny
   - Riadenie dvojstupňového chemického reaktora

Nespojitosť stavových a adjugovaných veličín

V čase prepnutia môže byť vektor $\boldsymbol{x}(t)$ **nespojitý** s prerušením v tvare

$$\boldsymbol{x}(t_i^+) = \boldsymbol{x}(t_i^-) + \boldsymbol{\Delta}_i(t_i, \boldsymbol{x}(t_i^-), \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}) \tag{15}$$

Podmienky **nespojitosti** v čase prepnutia dynamiky pre adjugované veličiny sú nasledovné

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-) =& \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\left[I + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_i)}\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i}\right)\boldsymbol{a}_i\right] \\ &+ \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\partial G}{\partial t_i}\right]\boldsymbol{a}_i + \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_i)}, \quad i = \overline{1, P-1}\end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{kde} \quad \boldsymbol{a}_i = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial t_i}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \boldsymbol{x}_i^T(t_i^-)}\right) \tag{17}$$

Prehľad

Algoritmus riešenia

1. Počiatočná **inicializácia** rovníc potrebných na výpočet gradientov:
   $\left[\frac{\partial J_j}{\partial t_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{u}_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{p}}\right]$
2. **Dopredná integrácia** systému a integrálnych tvarov F_j od t_0 po t_P. Reštart integrácie nastáva v čase t_s, **stavy môžu byť nespojité**.
3. Cyklus pre funkcionál a obmedzenia (J_j): $j = \overline{0,k}$
   (a) Inicializácia adjugovaných premenných $\lambda_j(t_P) = \frac{\partial G_j}{\partial \boldsymbol{x}(t_P)}$.
   (b) Inicializácia nulových dočasných veličín $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u},j}$ a $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{p},j}$.
   (c) **Spätná integrácia** adjugovaného systému a dočasných premenných od t_P po t_0. V prípade **nespojitosti adjugovaných rovníc** reštartujeme integráciu a dynamiku v týchto bodoch

$$\dot{\lambda}_j(t) = -\frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{u},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{u}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{p},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{18}$$

   (d) **Vypočítame gradienty** J_j vzhľadom na optimalizované premenné.

Algoritmus riešenia

1. Počiatočná **inicializácia** rovníc potrebných na výpočet gradientov: $\left[\frac{\partial J_j}{\partial t_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{u}_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{p}}\right]$
2. **Dopredná integrácia** systému a integrálnych tvarov F_j od t_0 po t_P. Reštart integrácie nastáva v čase t_s, **stavy môžu byť nespojité**.
3. Cyklus pre funkcionál a obmedzenia (J_j): $j = \overline{0, k}$
   (a) Inicializácia adjugovaných premenných $\lambda_j(t_P) = \frac{\partial G_j}{\partial \boldsymbol{x}(t_P)}$.
   (b) Inicializácia nulových dočasných veličín $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u},j}$ a $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{p},j}$.
   (c) **Spätná integrácia** adjugovaného systému a dočasných premenných od t_P po t_0. V prípade **nespojitosti adjugovaných rovníc** reštartujeme integráciu a dynamiku v týchto bodoch

$$\dot{\lambda}_j(t) = -\frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{u},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{u}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{p},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{18}$$

   (d) **Vypočítame gradienty** J_j vzhľadom na optimalizované premenné.

Algoritmus riešenia

1. Počiatočná **inicializácia** rovníc potrebných na výpočet gradientov: $\left[\frac{\partial J_j}{\partial t_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{u}_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{p}}\right]$
2. **Dopredná integrácia** systému a integrálnych tvarov F_j od t_0 po t_P. Reštart integrácie nastáva v čase t_s, **stavy môžu byť nespojité**.
3. Cyklus pre funkcionál a obmedzenia (J_j): $j = \overline{0, k}$
   (a) Inicializácia adjugovaných premenných $\boldsymbol{\lambda}_j(t_P) = \frac{\partial G_j}{\partial \boldsymbol{x}(t_P)}$.
   (b) Inicializácia nulových dočasných veličín $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u},j}$ a $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{p},j}$.
   (c) **Spätná integrácia** adjugovaného systému a dočasných premenných od t_P po t_0. V prípade **nespojitosti adjugovaných rovníc** reštartujeme integráciu a dynamiku v týchto bodoch

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j(t) = -\frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{u},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{u}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{p},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{18}$$

   (d) **Vypočítame gradienty** J_j vzhľadom na optimalizované premenné.

Algoritmus riešenia

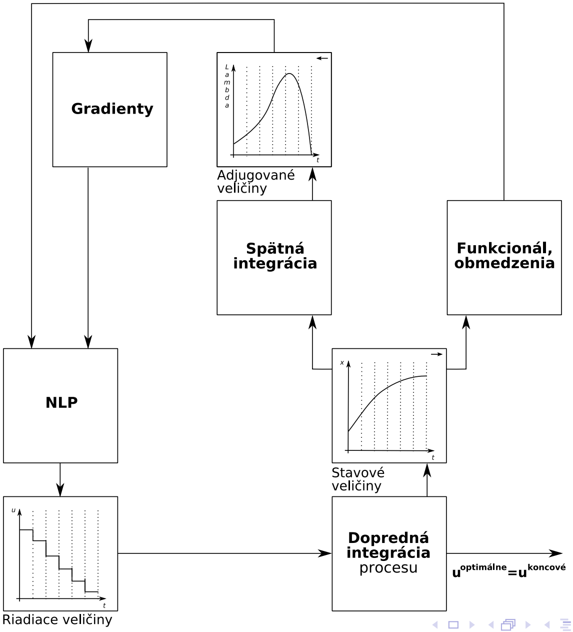
1. Počiatočná **inicializácia** rovníc potrebných na výpočet gradientov: $\left[\frac{\partial J_j}{\partial t_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{u}_i}, \frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{p}}\right]$
2. **Dopredná integrácia** systému a integrálnych tvarov F_j od t_0 po t_P. Reštart integrácie nastáva v čase t_s, **stavy môžu byť nespojité**.
3. Cyklus pre funkcionál a obmedzenia (J_j): $j = \overline{0, k}$
   (a) Inicializácia adjugovaných premenných $\boldsymbol{\lambda}_j(t_P) = \frac{\partial G_j}{\partial \boldsymbol{x}(t_P)}$.
   (b) Inicializácia nulových dočasných veličín $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{u},j}$ a $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{p},j}$.
   (c) **Spätná integrácia** adjugovaného systému a dočasných premenných od t_P po t_0. V prípade **nespojitosti adjugovaných rovníc** reštartujeme integráciu a dynamiku v týchto bodoch

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j(t) = -\frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{u},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{u}}, \quad \dot{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{p},j}(t) = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{18}$$

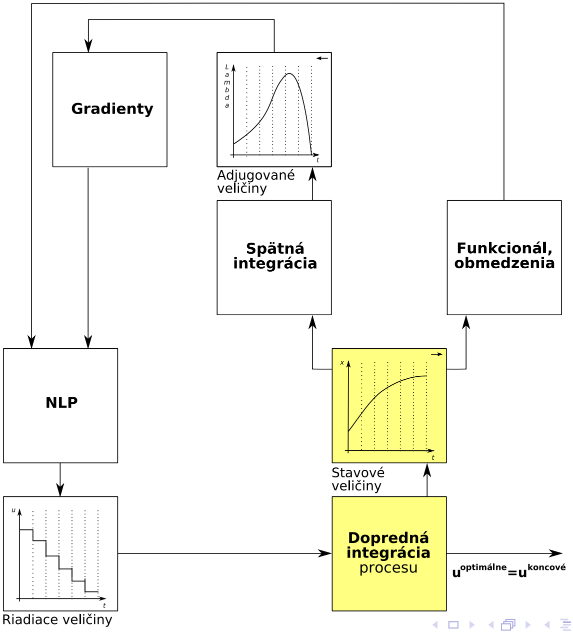
   (d) **Vypočítame gradienty** J_j vzhľadom na optimalizované premenné.

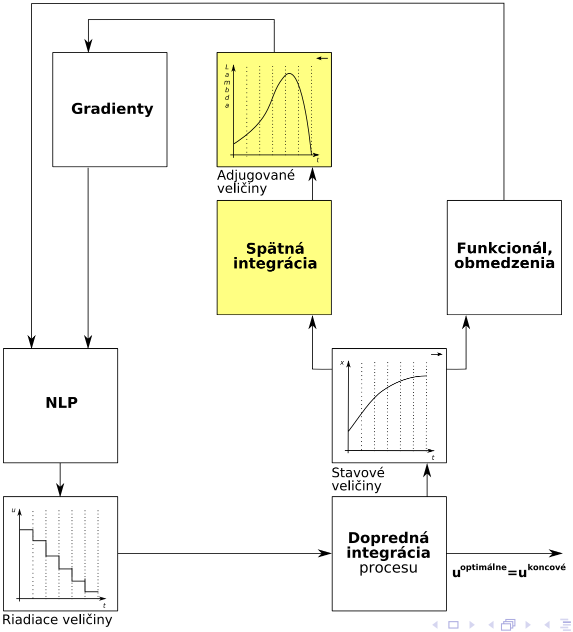
Prehľad

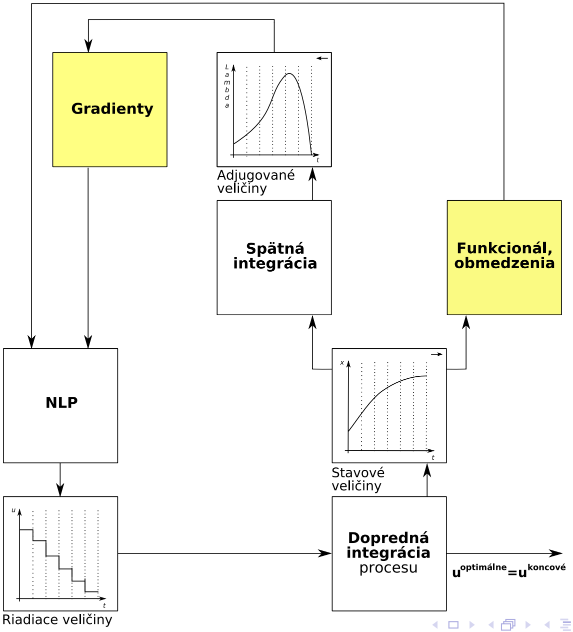
1. Dynamická optimalizácia hybridných systémov
   - Definícia hybridného systému
   - Definícia problému
   - Možnosti riešenia optimalizačného problému
2. Sekvenčná metóda – parametrizácia vektora riadenia
   - Princíp metódy
   - Nespojitosť stavových a adjugovaných veličín
   - Algoritmus riešenia
   - Grafická interpretácia algoritmu riešenia
3. Ilustratívne príklady
   - Riadenie zásobníkov kvapaliny
   - Riadenie dvojstupňového chemického reaktora

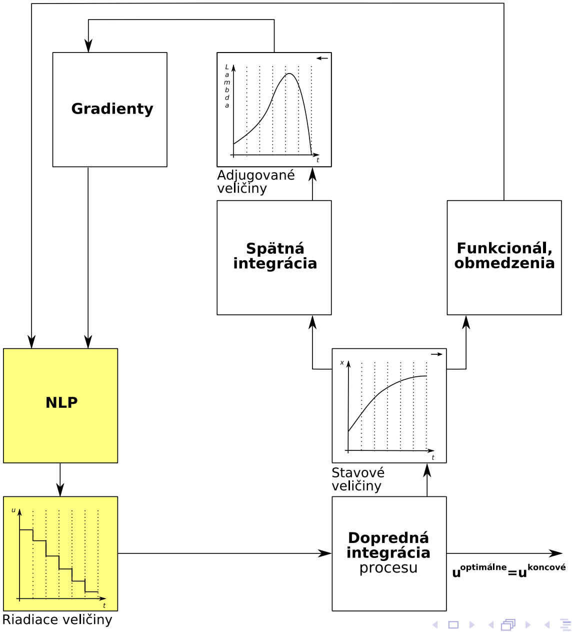


Gradienty
Lambda
t
Adjugované veličiny
Spätná integrácia
Funkcionál, obmedzenia
NLP
x
t
Stavové veličiny
u
t
Riadiace veličiny
Dopredná integrácia procesu
u^optimálne = u^koncové

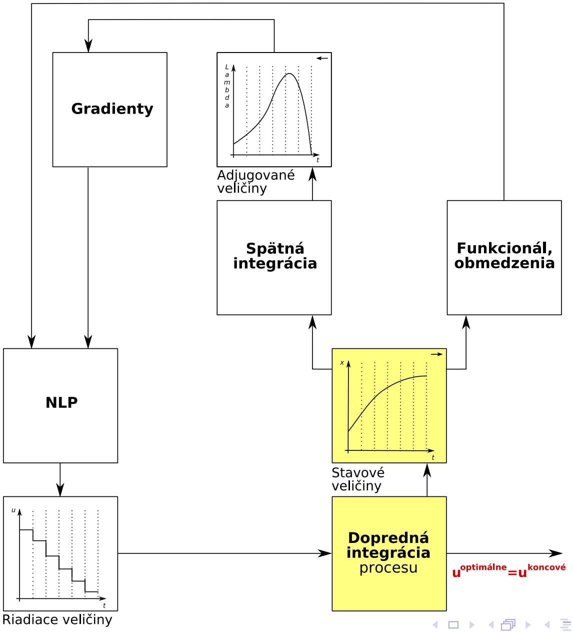

Gradienty
Adjugované veličiny
Spätná integrácia
Funkcionál, obmedzenia
NLP
Stavové veličiny
Dopredná integrácia procesu
Riadiace veličiny
u^optimálne = u^koncové


Gradienty
Lambda
t
Adjugované veličiny
Spätná integrácia
Funkcionál, obmedzenia
NLP
x
t
Stavové veličiny
u
t
Riadiace veličiny
Dopredná integrácia procesu
$u^{optimálne} = u^{koncové}$


Gradienty
L a m b d a
t
Adjugované veličiny
Spätná integrácia
Funkcionál, obmedzenia
NLP
x
t
Stavové veličiny
u
t
Riadiace veličiny
Dopredná integrácia procesu
u^optimálne = u^koncové

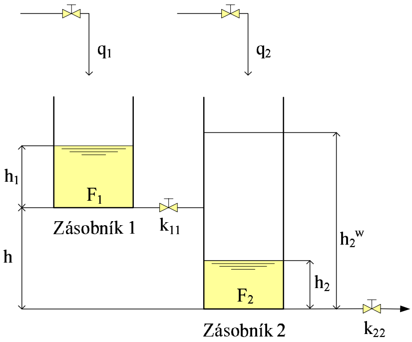


Gradienty
Lambda
t
Adjugované veličiny
Spätná integrácia
Funkcionál, obmedzenia
NLP
x
t
Stavové veličiny
u
t
Riadiace veličiny
Dopredná integrácia procesu
u^optimálne = u^koncové

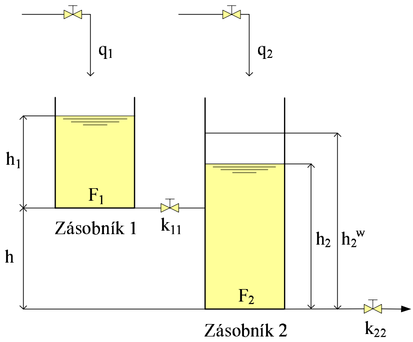

Gradienty
Adjugované veličiny
Spätná integrácia
Funkcionál, obmedzenia
NLP
Stavové veličiny
Riadiace veličiny
Dopredná integrácia procesu
$u^{optimálne} = u^{koncové}$

Prehľad

Zásobníky kvapaliny



Obr.: Bez interakcie



Obr.: S interakciou

Model

Systém je opísaný skupinami **diferenciálnych rovníc**

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \frac{q_1}{F_1} - \frac{k_{11}\sqrt{h_1}}{F_1} \\ \frac{q_2}{F_2} + \frac{k_{11}\sqrt{h_1}}{F_2} - \frac{k_{22}\sqrt{h_2}}{F_2} \end{cases} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \frac{q_1}{F_1} - \frac{k_{11}\sqrt{h_1-(h_2-h)}}{F_1} \\ \frac{q_2}{F_2} + \frac{k_{11}\sqrt{h_1-(h_2-h)}}{F_2} - \frac{k_{22}\sqrt{h_2}}{F_2} \end{cases} \tag{20}$$

s **podmienkou prepnutia** dynamiky

$$g_1 = h - h_2 = 0 \tag{21}$$

h - vertikálna vzdialenosť medzi zásobníkmi

Definícia problému

Funkcionál pre problém **minimalizácie času** má tvar

$$\min_{\Delta t_i, q} J_0 = t_P \tag{22}$$

vzhľadom na **obmedzenia**

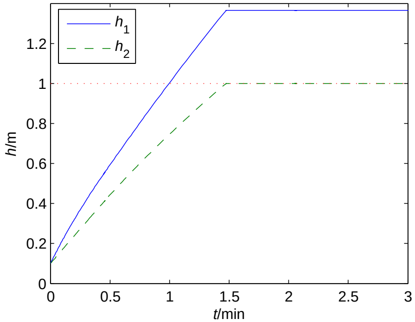
$$J_1 = h_2(t_P) - h_2^w = 0 \tag{23}$$

$$J_2 = \frac{\mathrm{d}h_1(t_P)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{24}$$

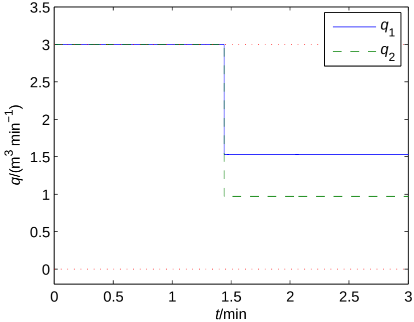
$$J_3 = \frac{\mathrm{d}h_2(t_P)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{25}$$

$h_2^w = 1\,\mathrm{m}$

Problém minimalizácie času



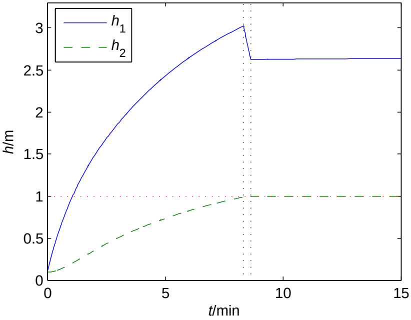
Obr.: Priebeh dynamiky pri použití **viacerých** riadiacich veličín



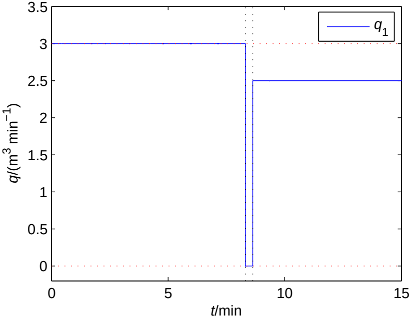
Obr.: Optimálne riadenie pri použití **viacerých** riadiacich veličín, $q_{1,2} \in [0, 3]$

Čas regulácie: 1,47 min

Problém minimalizácie času



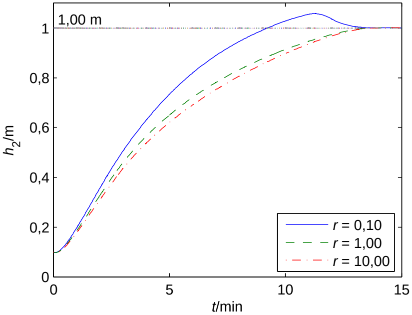
Obr.: Priebeh dynamiky pri použití **jednej** riadiacej veličiny



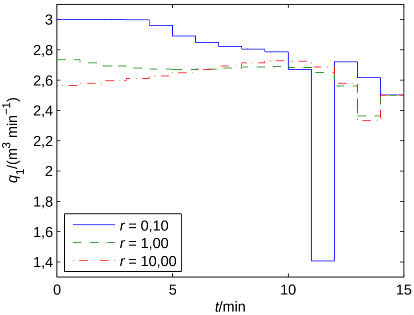
Obr.: Optimálne riadenie pri použití **jednej** riadiacej veličiny, $q_1 \in [0, 3]$, $q_2 = 0$

Čas regulácie: 8,623 min

Problém LQ riadenia



Obr.: Výška hladiny v druhom zásobníku pre rôzne hodnoty **r**



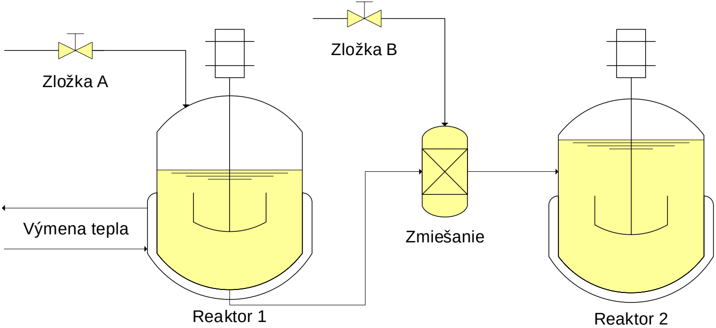
Obr.: Optimálne riadenie pre rôzne hodnoty **r**

$$\min_q J_0 = \int_{t_0}^{t_P} \left(\left(h_2 - h_2^s\right)^2 + \mathbf{r} \left(q_1 - q_1^s\right)^2 \right) \mathrm{d}t$$

Prehľad

1. Dynamická optimalizácia hybridných systémov
   - Definícia hybridného systému
   - Definícia problému
   - Možnosti riešenia optimalizačného problému
2. Sekvenčná metóda – parametrizácia vektora riadenia
   - Princíp metódy
   - Nespojitosť stavových a adjugovaných veličín
   - Algoritmus riešenia
   - Grafická interpretácia algoritmu riešenia
3. Ilustratívne príklady
   - Riadenie zásobníkov kvapaliny
   - Riadenie dvojstupňového chemického reaktora

Dvojstupňový chemický reaktor



Obr.: Dvojstupňový chemický reaktor

Prvá reakčná fáza: $2A \rightarrow B \rightarrow C$

Druhá reakčná fáza: $B \rightarrow D, \quad B \rightarrow E, \quad 2B \rightarrow F$

Proces

- **prvá** reakčná fáza – zmena teploty pomocou ohrevnej cievky ($P - 1$ časových intervalov)
- **druhá** reakčná fáza – **izotermické** podmienky (1 časový interval)
- proces **zmiešavania** je opísaný nasledujúcimi rovnicami

$$V_2 c_\mathrm{A}(t_s^+) = V_1 c_\mathrm{A}(t_s^-) \tag{26}$$

$$V_2 c_B(t_s^+) = V_1 c_\mathrm{B}(t_s^-) + S c_\mathrm{B}^s \tag{27}$$

$$V_2 c_\mathrm{C}(t_s^+) = V_1 c_\mathrm{C}(t_s^-) \tag{28}$$

S - množstvo pridanej zložky B v čase prepnutia

Model

Systém opisuje skupina **diferenciálnych rovníc**

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dot{c}_A = -2k_1(T)c_{\mathrm{A}}^2 \\ \dot{c}_B = k_1(T)c_{\mathrm{A}}^2 - k_2(T)c_{\mathrm{B}} \\ \dot{c}_C = k_2(T)c_{\mathrm{B}} \end{cases} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dot{c}_B = -0,02c_{\mathrm{B}} - 0,05c_{\mathrm{B}} - 0,00008c_{\mathrm{B}}^2 \\ \dot{c}_D = 0,02c_{\mathrm{B}} \\ \dot{c}_E = 0,05c_{\mathrm{B}} \\ \dot{c}_F = 0,00004c_{\mathrm{B}}^2 \end{cases} \tag{30}$$

s **kinetickými konštantami** definovanými ako

$$k_1(T) = 0,0444e^{\frac{-2500}{T}} \tag{31}$$

$$k_2(T) = 6889,0e^{\frac{-5000}{T}} \tag{32}$$

Definícia problému

Funkcionál vzhľadom na **maximalizáciu** produktu **zložky D** v koncovom čase t_P má tvar

$$\max_{S,\Delta t_i,T[0,t_s]} J_0 = V_2 c_D(t_P) \tag{33}$$

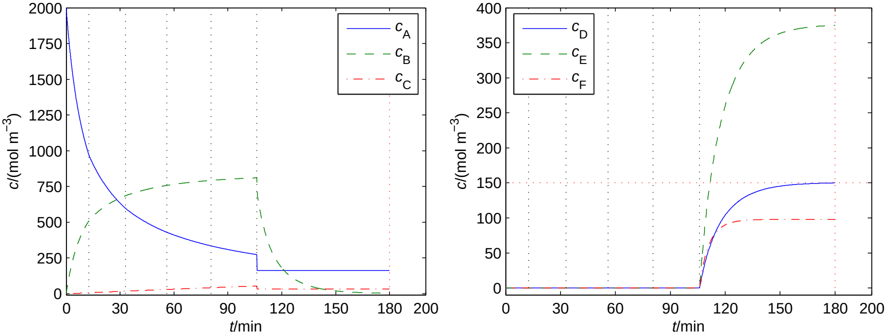
vzhľadom na **obmedzenia**

$$J_1 = c_D(t_P) - c_D^w \geq 0 \tag{34}$$

$$J_2 = t_P - \sum_{i=1}^{P} \Delta t_i \geq 0 \tag{35}$$

$c_D^w = 150\,\mathrm{mol\,m^{-3}}$
$t_P = 180\,\mathrm{min}$

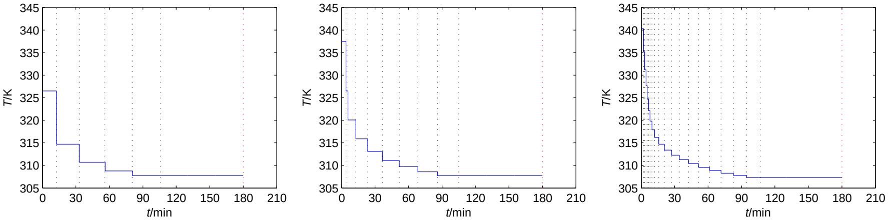
Priebeh stavových veličín a funkcionálu



Obr.: Optimálne stavové trajektórie zložiek A-F vzhľadom na 6 intervalov

$$\max_{S,\Delta t_i,T[0,t_s]} J_0 = V_2 c_D(t_P), \quad J_1 = c_D(t_P) - c_D^w \geq 0, \quad J_2 = t_P - \sum_{i=1}^{P} \Delta t_i \geq 0$$

Priebeh riadiacich veličín



Obr.: Optimálne riadenie pre 6, 10 a 20 diskretizovaných intervalov

Počet intervalov, P	Čas prepnutia, t_s/min	Množstvo pridanej zložky B, S/m^3	Množstvo zložky D, J_0/mol
6	106,04	0,0702	**25,54**
10	104,98	0,0705	**25,57**
20	106,82	0,0705	**25,58**

Závery

- Prezentácia optimálneho riadenia hybridných systémov
- Nutná transformácia na NLP (okrem triviálnych prípadov)
- Vyhovujúce sú parametrizácia vektora riadenia (CVP) a totálna parametrizácia (OC)
- Je veľmi málo sw balíkov, ktoré tieto algoritmy podporujú. Čiastočne napríklad dotcvpsb (Tomáš Hirmajer)

M. Fikar.
Dynamická optimalizácia procesov.
STU Bratislava, Slovenská e-akadémia, n. o., 2007.

T. Hirmajer, M. Čižniar, M. Fikar, E. Balsa-Canto, and J. R. Banga.
Brief introduction to DOTcvp – dynamic optimization toolbox.
In *Proceedings of the 8th International Scientific - Technical Conference Process Control 2008*, page C011a, Kouty nad Desnou, Czech Republic, June 9-12, 2008 2008. University of Pardubice.

T. Hirmajer and M. Fikar.
Dynamic optimization of a hybrid coupled tanks system.
Journal of Electrical Engineering, 57(3):166–171, 2006.

T. Hirmajer and M. Fikar.
Optimal control of a two-stage reactor system.
Chemical Papers, 60(5):381–387, 2006.

Poďakovanie

Táto prezentácia by nebola vznikla bez výsledkov a práce mojich súčasných a minulých spolupracovníkov:

- Ing. Tomáš Hirmajer, PhD.
- Ing. Michal Čižniar
- Ing. Radoslav Paulen